DST n°2

Mathématiques - 22 Novembre 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 5 exercices et 2 problèmes tous indépendants.

Exercice 1

Calculer les sommes suivantes en simplifiant les résultats au maximum :

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{2k}}{3^k}$ (x est un réel tel que $|x| \neq \sqrt{3}$)
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$
3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} (k-n)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}\binom{n}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-2)^{k-n}\binom{2n}{k}$

Exercice 2

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (i^2+ij)$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^i\binom{n}{j}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j}\binom{j}{k}$

Exercice 3

On définit dans cet exercice trois fonctions :

- La fonction *sinus hyperbolique*, notée sh, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.
- La fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$
- La fonction *tangente hyperbolique*, notée th, définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Montrer que sh, ch et th sont toutes trois bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de sh, ch et th.
3. Étude de sh
   (a) Justifier, si possible sans calculs, que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier le signe de sh sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de $\operatorname{sh}(x)$.
4. Étude de ch
   (a) Justifier que ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations complet de ch.
5. Étude de th
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) \in]-1;1[$.
   (b) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a : $\operatorname{th}'(x) = 1 - (\operatorname{th}(x))^2$.
   (c) En déduire les variations de th.
   (d) Montrer que la courbe représentative de la fonction tangente hyperbolique admet deux asymptotes horizontales dont on précisera les équations.
   (e) Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$ et préciser sa bijection réciproque.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de prouver la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1$$

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a :

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

Indication : on pourra étudier les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$ *et* $g : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1)-\ln(k))$$

puis que

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$$

3. Conclure.

Exercice 5

Dans cet exercice, a est un réel strictement positif et on considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.
2. Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, étudier ses variations et dresser son tableau de variation. On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.
3. Montrer que si $a < \dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
4. Que se passe-t-il si $a = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{e}}}$? Et si $a > \dfrac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{e}}}$?

Problème 1 - Limite inférieure d'une suite

Soit a et b deux entiers tels que $a \leq b$, on notera $[\![a, b]\!] = \{k \in \mathbb{Z},\ a \leq k \leq b\}$ l'intervalle d'entiers d'extrémités a et b.

Pour $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de réels, et I un ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min\limits_{i \in I} x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i,\ i \in I\}$. Par exemple, $\min\limits_{i \in [\![1,9]\!]} \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{9}$.

1. Un exemple : déterminer $\min\limits_{i \in [\![0,4]\!]} \dfrac{(-1)^i}{i+1}$.

2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs.
   (a) Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n(k) = \min\limits_{i \in [\![n, n+k]\!]} x_i$.

   Montrer que la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est décroissante

   (b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k \geq 0}$ est convergente. On note $u_n = \lim\limits_{k \to +\infty} u_n(k)$.

   (c) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.

   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$). Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n \geq 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n$.

3. Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

   (a) Expliciter pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$ les termes $u_n(k)$ associés à chacune de ces deux suites $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$.

   (b) Déterminer $\liminf\limits_{n \to +\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n \to +\infty} z_n$

4. On suppose ici que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

5. Montrer que si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors $\liminf\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$.

Problème 2

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.

On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois deux « Pile » consécutifs. On note X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient deux « Pile » consécutifs. Si on n'obtient jamais deux « Pile » consécutifs, on conviendra que X vaut -1.

Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Face,..., alors X prend la valeur 5.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose les événements suivants :

- F_n : « Obtenir Face au n-ième lancer »
- P_n : « Obtenir Pile au n-ième lancer »

La suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite d'événements deux à deux indépendants. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose les événements suivants :

- U_n : « Au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois la succession de deux piles consécutifs »,
- $B_n = P_{n-1} \cap P_n$.

Enfin, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on note :

$$u_n = P(U_n) \quad \text{et} \quad a_n = P(X = n)$$

Partie A

1. Exprimer les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ à l'aide de certains événements P_k et F_k. En déduire les valeurs de a_2, a_3 et a_4.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k$.

Partie B

3. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1})$$

   (b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$$

   En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4 :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$$

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 4}$ est croissante, puis qu'elle converge vers 1.